「s－d相互作用による異常性について」について

長 岡 洋 介（カリホルニヤ大）*

（1月22日受理）

高 野 様

物性研究の論文[1]、興味深く読みました。そこで得られている結論は次の二点にまとめられると思います。

1）Jの符号によらず低温で異常がおこる。

2）その異常は $T=T_C$ で sharp に一種の phase transition としておこる。

1）の結論はこれまでの誰の計算[2)～5)]ともちがいますし、2）の結論も、少くとも私が予想しておりましたこととはちがつております。問題は大分重要に思えますので、以下とりあえず私に気のつきましたことを書きたいと思います。書きますことが私の「感じ」による所が少くないことをお許し下さい。日本での議論の一助になれば幸せです。

1° この問題を調べるやり方は高温側からと低温側からの二通りがあると思います。高温側からというのは perturbation でやつていつて、それが温度を下げていつた時にどうなるかを見るやり方で、Abrikosov,[3] Yasida-Okiji[4] などがそれにあたると思います。Suhl[5] のもそれに入ると思うのですが、Suhl 自身はまだその方法が低温までつかえる可能性をすてておりませんので一応例外としておきましよう。この方法によりますと、例えば Abrikosov では T＝0 のとき、scattering amplitude が

$$\Gamma(\omega)=\frac{J(\sigma\cdot S)}{1-J\rho\, ln\,\dfrac{|\omega|}{\varepsilon_F}} \tag{1}$$

と得られ、J＜0のとき $|\omega|=\varepsilon_F \exp(1/J\rho)$ に一種の resonance が出ます。

---

*）京大基研より海外出張中

（ρは一電子あたりの状態密度）(1)には perturbation の各 order で $J(J\,ln|\omega|)^{n-1}$の項はすべて集められていると Abrikosov ものべていますしその計算を check した私と同室の Allan Griffin も言つておりますので、ここでは(1)の結果を信じることにしたいと思います。* ところで(1)は巾が 0 の resonance を与え、これはどうも physicalではない、もし(1)で無視された項をちゃんととり入れればきつと有限の巾が出て来るだろう── というのは誰でも考えることです。そこでかりに(1)が

$$\Gamma(\omega)=\frac{J(\sigma\cdot S)}{(1-J\rho\,ln|\omega|/\epsilon_F)+i\delta} \tag{1'}$$

と書きかえられるとして、二次まで正しく計算して出て来る imaginary part を(1') の形にとりこみますと、その結果は $\omega>0$ のとき

$$\delta=\frac{\pi}{2}J\rho \tag{2}$$

となります。ところがこの (1') (2) という形は超電導の問題で vertex partを perturbation で計算したのと全く同じ形で[7] ωについて解析接続をすると不安定な pole が出てしまいます。有限温度で同じ議論をしますと、こういう不安定性はある T_c 以下でおこることがわかります。

Abrikosov の計算を知りました時、私の疑問を以上のような形で Abrikosovに伝えました所、私的にこれについて彼の見解を知ることが出来ました。それによりますと、彼が巾が出るように計算をすすめた所、得られた結果は (1') のような形ではなく、$S=\frac{1}{2}$ では Suhl が最初の論文[5]で得たのに一致し、それは超電導のときのΓと同じ形ではない、従つてそれは不安定を意味せぬというのです。ところがこの Suhl の形果も、位置こそちがえ (1')と同様 $J<0$ だと不安定な pole を与えることにかわりがありません。Abrikosov がそれに目をつぶつているのは理解しかねるところです。

とにかく以上のことからわかることは $J<0$ なら $T<T_c$ で何かがおこるらしいということです。$J>0$ では (1') は resonance も、不安定な poleももた

---

* 高野さん達が Appendixで出された式は(1)とちがいますが、三輪君からの私信によりますとこの部分は取消されたとの事ですのでここではふれません。

ず、perturbation が低温でだめになる証拠はこの限りでは何も見あたりません。

2° 低温側からの approachというのは私の計算[6]やこの論文がそれにあたると思います。それではそれは高温側からの approachとどう結びつくべきものなのでしょうか？ 特にこの論文で得られているJ＞0での self-consistent solution というのは、perturbationで得られる答とどういう関係にあるのでしょうか。両者は本質的に同じなのか、前者は近似のせいで出て来た fictitious なものなのか、私にはどうもこれは fictitious なもののように思われます。というのはJ＜0では低温で perturbation による答がだめになり、かわりに self-consistent solution が得られるという事情があり、この場合には、二つの解は本質的にちがうと思われるのに、J＞0でだけ二つが同じになるのは考えにくいからです。そこで私はどこからこういう fictitions な解が出て来たか、その可能性として二つの場合を考えてみました。

1） この論文と私の計算は本質的に同じで、二つともどこか悪いところがある。

2） 二つの計算は本質的にちがう。(私のが正しいかどうかは別として)

1)の可能性は私が自分のたてた self-consistent equation をすつかり解かないで、J＜0なら解があることを示しただけだつたことから来ております。そこでまずJ＞0でも解があるかどうか調べてみました。しかし式が複雑で私にはJ＞0で解をみつけることも、解がないことを証明することも出来ておりません。ただ、この論文で得られているようなJ＜0のときとすつかり同じ形をした解がないことだけは確かなような気がします。そこで、ここでは、一まず2）の方について、つまり、二つのやり方のちがいについて調べてみたいと思います。

3° 才一に、おそらく誰でもが感じると思います疑問は、スピン演算子Sを a^+, a で書きなおすことのよし悪しです。単純に考えますと $S=\frac{1}{2}$ のとき

$$S_z=\frac{1}{2}(a_\uparrow^+a_\uparrow-a_\downarrow^+a_\downarrow)\qquad \text{etc.}$$

と書きなおすことは、そこにスピンがあることを考えるかわりに、localized

level を考えることになつております。従つて、$S_Z=\pm\frac{1}{2}$という状態のほかに、その level がすつかり空の状態、すつかりつまつた状態（ともに$S=S_Z=0$)が勘定に入つて来てしまいます。Abrikosov の perturbationの時は展開の各項にa^+, aはa^+aというかたまりでしか入つて来ないということからこの困難は、normalizationをかえるだけでのぞけたのでしたが、ここでやてつおりますように、後でa^+, aを二つにわけてしまうような時、Abrikosov の議論はそのまま適用できないように思われます。この困難がどこでどのように結果に影響するのか、私には具体的に指摘できないのですが。

4° そこで、もう少し別の角度から考えなおしてみます。$J<0$で低温でおこることを一種の phase transition とみますと、私の場合 order parameter に当る量は

$$\sum_{KK'}\langle c^+_{K\uparrow}c_{K'\downarrow}S_-\rangle \tag{3}$$

または

$$\sum_{KK'}\langle (c^+_{K\uparrow}c_{K'\uparrow}-c^+_{K\downarrow}c_{K'\downarrow})S_Z\rangle \tag{3'}$$

で与えられます。$\langle\ \ \rangle$は普通の statistical average ですから、対称性から言つて(3)＝(3')でなければなりません。一方この論文でやつておりますことは(3), (3')をつぎのように二つの量の積の形におくことにあたつているように思います。すなわち、磁場＝0として、(3)は

$$\sum_{KK'}\langle c^+_{K\uparrow}c_{K'\downarrow}a^+_{\downarrow}a_{\uparrow}\rangle\approx-\sum_{KK'}\langle c^+_{K\uparrow}a_{\uparrow}\rangle\langle a^+_{\downarrow}c_{K'\downarrow}\rangle=-\alpha^2 \tag{4}$$

(3')は

$$\sum_{KK'}\langle (c^+_{K\uparrow}c_{K'\uparrow}-c^+_{K\downarrow}c_{K'\downarrow})\frac{1}{2}(a^+_{\uparrow}a_{\uparrow}-a^+_{\downarrow}a_{\downarrow})\rangle$$

$$\approx\frac{1}{2}\sum_{KK'}\{-\langle c^+_{K\uparrow}a_{\uparrow}\rangle\langle a^+_{\uparrow}c_{K'\uparrow}\rangle-\langle c^+_{K\downarrow}a_{\downarrow}\rangle\langle a^+_{\downarrow}c_{K'\downarrow}\rangle$$

$$+\langle c^+_{K\downarrow}a_{\uparrow}\rangle\langle a^+_{\uparrow}c_{K'\downarrow}\rangle+\langle c^+_{K'\uparrow}a_{\downarrow}\rangle\langle a^+_{\downarrow}c_{K'\uparrow}\rangle\}$$

$$=\beta^2-\alpha^2. \tag{4'}$$

長岡洋介

(4)=(4′)という関係は$\beta=0$のときに限りみたされます。ところがJ>0のときに得られた解というのが$\alpha=0$、$\beta\neq0$になつていたことを考えてみますとこの解がちようど上のような具合に対称性を破つていることになるのです。最初のα ,βという量自体が対称性に反していたことを、最後の答にはα^2, β^2だけが出ることであるいは許されるかも知れません。その意味で$\alpha\beta=0$ という結果は、私の場合でいうと、$\langle c^+_{K\uparrow}c_{K'\downarrow}S_z\rangle$といつた量が$\alpha\beta$に相当することからみて、そしてこの量が対称性から0となることからみて、もつともなわけですが、$\beta\neq0$である限り、上の対称性は破つているわけなのです。このことはJ>0の時の$\beta\neq0$という解がfictitions なものであることを意味しないでしようか?

5° この論文で得られている才二の結論、$T=T_c$で sharp に一種の phase transition がおこるという点も才一の結論におとらず重要に思われます。私の式は複雑なために$T=T_c$ までは解けなかつた。一方この論文で得られた式は$T=T_c$まで正確に解けて、sharpな phase transitionを与えるということになつております。そこで問題はこの簡単化によつて、何か本質的なものが失なわれなかつたかどうかということになります。

私の論文がどうして$T=T_c$ まで解けないかと言いますと、話は少々 technical になりますが、式が次のような形をしているからです。

$$\begin{aligned} &G(\omega)+J\Gamma(\omega)=\text{inhomogeneous term} \\ &\Gamma(\omega)+JmG(\omega)+\underset{\sim\sim}{JG(\omega)}=0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

簡単のため骨組だけ書きました。式のちやんとした形は論文[6]の(2.8),(2.14)式をみて下さい。(5)でG, Γはそれぞれ$\langle\!\langle c|c^+\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle Sc|c^+\rangle\!\rangle$という形のGreen 函数、mは(3)のようなorder parameterです。私は(5)を解くのに

$$m\gg1 \tag{6}$$

を仮定し、$\sim\sim$の項を無視したのでした。ところが$T\sim T_c$ では(6)がだめで従つて解けないというわけです。$\sim\sim$の項がどこから出て来たかというと;$\langle\!\langle Sc|c^+\rangle\!\rangle$というGreen 函数の時間微分をとるとき、$\dot{c}$の部分から

$J\ll SSc|c^+\gg$ があらわれ、その一部が $J\ll c|c^+\gg$ に reduce したのでした。このような項は、この論文のようにGreen 函数の分割を一つ前にやりますと出てまいりません。

ところで(5)式は、この項のおかげで別の解き方も出来るのです。私自身は間違いましたが、(5)は perturbation で考えて少くも J^3 までは正しく（実はこれは私が近似をする際の一つの方針でもあつたわけです。つまりKondo anomaly がちやつと入るためには、その近似は少くも J^3 までは正しくなければならないだろうというわけです）実際 Yosida-Okiji が示しましたように $T\gtrsim T_c$ まで正しそうな解を得ることも出来ます。この意味で(5)式は超電導の Gorkov eq. とは大分ちがつているといわねばなりません。

私のとつた"order parameter" についても同じようなことが言えます。(3)で定義される量は高温でも意味をもつていて perturbation で計算することも可能です。ちゃんとは計算してみておりませんが、それをやると温度が T_c に近づくと急に大きくなるという風になつているのだと思います。そうしますとこれは $T>T_c$ で普通の phase transition の場合の short rang order に当つているようです。一方 $T<T_c$ では私の計算によりますと、$T=0$ で最大それから温度が上るにしたがつて小さくなり、$T=T_c$ でほとんど0になるので、これは long range order に当ります。あるいはこうも言えかも知れません。普通の phase transition の場合に、q-dependent な order parameter $\Delta(q)$ を考えたとすると、T_c は $\Delta(0)$ が0になる温度としてきまり、$\Delta(q)$ $(q\neq0)$ は $T>T_c$ でも short rang order として生き残る。ところでここでの問題はもともと local な問題であるため考えなければならぬのは $\Sigma_q\Delta(q)$ という量で、これは全温度領域で0とならない。

問題はこのような高温側の解と低温側の解が $T=T_c$ のあたりでどのようにつながるのかということになります。この先は私の「感じ」にすぎないのですが、私の出した(5)式の self-consistent solution が 〰〰 の項のために $T=T_c$ になる前にだめになる事情からみて、二つの解はそこでなめらかにつながるのではないかという気がします。$T=T_c$ でちようど0になるような long range order に相当する量が、私には思いつかないというのも一つの

長岡洋介

理由です。

この論文では、上にも述べましたように、〜〜〜〜 の項ははじめから出てまいりません。それと同時にとられるorder parameter も

$$\alpha = \sum_{K} \langle a_{\uparrow}^{+} c_{K\uparrow} \rangle \tag{7}$$

と、それ自身$T>T_c$では意味をもたなくなる量です。それはそれとしてその自身の中ではself-consistent になつているわけですけれども、phase transition の存在を示したことにはならぬのはないでしょうか？

6° 以上をまとめますとつぎのようになります。

(1) $J>0$ではperturbation が低温でも悪くならない以上、何も特別なことはおこらないだろう。

(2) sharp な phase transition というのは、それが出るような近似をしたから出たのであつて、それの存在を証明したことにはならない。

それでは一体$T=T_c$で何がおこるのか、私が上に予想したことが正しいのかそれともこの論文で示したような一種のphase transitionが結局はおこるのか、高温側からperturbation で考えたときちようど$T=T_c$で不安定なpole が出て来るという事情は物理的には何を示すのか、一種の phase transitionがおこるとしても、その「一種の」というのは、従来のphase transitionの概念をほんのちよつとmodifyすることですむものなのか、そうでないのか。そのあたりの事情をもつとよく知りたいものだと思います。ご意見をおきかせいただければ幸いです。

References

1) 高野・小川・大沢・高中、物性研究 5 (1965) 19.
2) J. Kondo, Prog. Theor. Phys. 32 (1964) 37; 34 (1965) 204.
3) A. A. Abrikosov, Physics 2 (1965) 5.
4) K. Yosida and A. Okiji, preprint.
5) H. Suhl, Phys. Rev. 138 (1965) A515.
6) Y. Nagaoka, Phys. Rev. 138 (1965) A1112.
7) A. A. Abrikosov et al., Method of Quantum Field Theory in Statistical Physics, Sec. 33.